El axioma de congruencia

Prof. Domingo Almendras

Los «Elementos Geométricos» de Euclides, escritos tres siglos antes de la era cristiana, ha sido, sin duda, la obra científica más famosa y de mayor influencia en la cultura matemática ya que sirvió de modelo de investigación y de exposición lógica durante más de dos mil años. Los trabajos de Arquimedes, Galileo, Newton y de muchos contemporáneos están inspirados en esa admirable obra.

La exposición lógica de los Elementos sólo ha sido superada recientemente gracias a los estudíos críticos realizados por Peano, Veronese, Pasch, etc., pero las modificaciones, supresiones y agregados a la obra de Euclides, sugeridas por ellos, aun no han afectado a la enseñanza de la geometría en las escuelas secundarias ni en la Universidad. Lo que se denomina «Geometría moderna» no es la moderna manera de exponerla, sino que es la extensión del campo del sistema euclideano hacia la teoría de las transversales, de los haces de rectas, nuevas propiedades del triángulo, etc.

Creemos que en las escuelas secundarias se puede enseñar la geometría de acuerdo con la nueva axiomática sin que ella pierda su aspecto intuitivo y práctico como se ha estado ensayando con buen éxito en Italia y en algunos países latinoamericanos.

En este artículo pretendemos insinuar un ensayo en el tratamiento de la congruencia.

CONCEPTO DE CONGRUENCIA

Aunque *el movimiento* de una figura está ligado a la concepción de algún cuerpo sólido y, en su esencia, incluye las nociones de espacio y tiempo, creemos que el alumno debe aprovecharlo sin dársele mayores explicaciones. Así, por ejemplo; la coincidencia de una línea con el canto de una regla o con un hilo estirado podrán servir para formar el concepto de segmentos congruentes; el rastro de un animal, las letras producidas en la escritura a máquina, el cálcado de figuras, etc., servirán para formar el concepto de congruencias de figuras. Una práctica en el pizarrón con figuras de colores o recortadas servirá para que los alumnos maduren el concepto de la congruencia. Luego se puede pasar a las definiciones y axiomas.

DEFINICIÓN I.—Dos figuras F y F′ (puntos, líneas, partes del plano, etc.) son congruentes si se les puede hacer coincidir por medio de movimientos de las figuras en el plano o mediante el transporte de una de las figuras de modo que coincida con la otra. Se pondrá $F \equiv F'$.

En la enseñanza secundaria esta definición debe ser explicada, haciendo que los alumnos efectúen o verifiquen la congruencia de segmentos, ángulos, triángulos, etc., trasladando las figuras calcadas en papel transparente o recortadas en cartón. Conviene hacer notar que si mediante ciertos movimientos se logra verificar la congruencia ella se podrá verificar de una infinidad de maneras.

AXIOMA I.—Una figura F es congruente con sí misma. $F \equiv F$.

AXIOMA II.—Si una figura F es congruente con otra F′, entonces F′ es congruente con F. Anótese: Si $F \equiv F'$, entonces $F' \equiv F$.

AXIOMA III.—Si una figura F′ es congruente con F″ y F″ es congruente con F‴, entonces F′ es congruente con F‴.

Anótese: Si $F' \equiv F''$ y $F'' \equiv F'''$, entonces $F' \equiv F'''$.

La explicación de este axioma se puede hacer mediante una verdadera actividad del alumno copiando la figura F′ calcada de F″ y llevándola a coincidir con F‴. Conviene hacer notar que el axioma III es el más empleado en la práctica. Póngase numerosos ejemplos.

NOTA I.—*El signo de congruencia.* Para el signo de congruencia adoptaremos tres líneas paralelas horizontales ($\equiv$). Consideramos que el signo $\cong$ adoptado en nuestra enseñanza y que figura en algunos textos norteamericanos es defectuoso desde el punto de vista lógico. En efecto, los dos signos $=$ y $\backsim$ significan; el primero, igualdad de longitud, área, volumen e implica, por consiguiente, la noción de medida que es un concepto más complejo que el que se quiere definir; el signo $\backsim$ significa igualdad de forma o semejanza, lo que implica el de congruencia y proporcionalidad. El signo $\equiv$ para la congruencia se puede usar, sin objeción, en el estudio de las geometrías no euclideanas en las que no existe el concepto de semejanza.

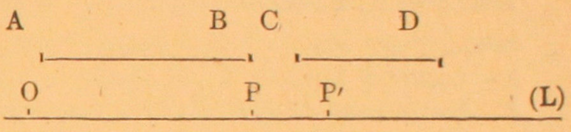
NOTA II.—*La noción de transporte.* Euclides en sus «Elementos» elimina sistemáticamente el transporte de figuras en el plano porque, en general, los geómetras griegos comprendieron que los axiomas y teoremas geométricos debían ser independientes de las propiedades de la materia, es decir, del espacio físico. En efecto, al efectuar cualquier transporte es necesario pensar en algo material, por ejemplo, un compás, una hoja de papel, etc. En la enseñanza secundaria, sin embargo, es preferible adoptar el movimiento como punto de partida en la fundamentación lógica a la manera concebida por Helmholtz, Lie, Klein y otros grandes geómetras contemporáneos, porque así se está más de acuerdo con la intuición y experiencia del alumno.

AXIOMA IV.—Si se tiene un segmento cualquiera AB y sobre una recta L un punto O, se puede encontrar hacia ambos lados de él dos puntos P y P′, tales que $OP \equiv OP' \equiv AB$.

Este axioma permitirá la explicación de los dos sentidos que se pueden considerar en una recta y de la definición de semirrecta o rayo. Cada punto de una recta la divide en dos semirrectas.

Definición II.—*Suma de dos segmentos.* Si se dan dos segmentos AB y CD y un punto O en una recta L y determinamos en una de las semirrectas de L un punto P de modo que $OP \equiv AB$ y en la semirrecta determinada por P y que no contiene a O un punto P′ de modo que $PP' \equiv CD$, entonces OP′ será la suma de los segmentos AB y CD y pondremos:

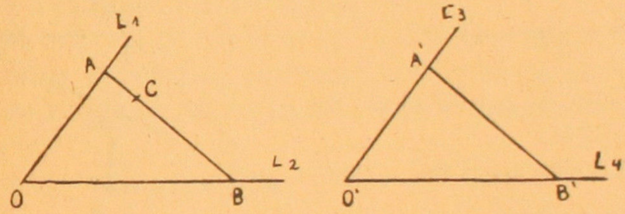
$$OP \equiv OP + PP'$$



$$\text{y} \quad OP' \equiv AB + CD$$

Esta definición permitirá generalizar la suma para más de dos segmentos.

Axioma V.—*Axioma de congruencia de ángulos.* Dos ángulos de vértices O y O′, formados respectivamente por las semirrectas OL_1, OL_2 y $O'L_3$, $O'L_4$ son congruentes si de $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, estando A en OL_1; B en OL_2; A′ en $O'L_3$; B′ en $O'L_4$, resulta: $AB \equiv A'B'$.



Consecuencia inmediata de este axioma es la proposición: «Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, son congruentes».

Definición III.—Cualquier rayo o semirrecta que parte de O y tiene un punto común C con AB, estando C entre A y B se dirá que este rayo es interior al ángulo. (Fig. anterior).

Observación.—Los axiomas de orden que sería necesario tratar para completar la axiomática de la geometría, creemos que en la enseñanza secundaria deben limitarse sólo a las nociones de «entre dos puntos»; «entre dos semirrectas»; «en la prolongación de AB» y «en la prolongación de BA». Estas nociones se usan al hablar de división interior y exterior de un trazo.

TEOREMAS QUE DERIVAN DE LOS AXIOMAS ANTERIORES

En lo que sigue procuraremos dar el orden más correcto que debe darse al tratamiento de la materia, de modo que el alumno pueda darse cuenta, ya sea en forma intuitiva o lógica que cada propiedad se puede verificar y probar mediante otras, conocidas previamente.

Hay un paso en el desarrollo lógico de la materia que se refiere al axioma IV que conviene aclararlo en las aplicaciones que siguen. En efecto, en dicho enunciado no se hace referencia al orden en que están los lados que comprenden el ángulo y según sea ese orden los triángulos pueden ser del mismo sentido y congruentes o de distinto sentido y entonces, son simétricos. En el caso de simetría se dirá que los elementos homólogos son congruentes.

TEOREMA I.—Los ángulos basales de un triángulo isósceles son iguales.

Dm. Bastará considerar los ABC y BAC (Axioma IV, caso de simetría).

TEOREMA II.—Si se construyen sobre una misma base dos triángulos isósceles, la recta que une los vértices opuestos a la base común es bisectriz de los ángulos opuestos a la base, dimidia esta base y es perpendicular a ella.

Dm. Dejada al lector.

Este teorema se aprovechará para ejecutar las siguientes construcciones:

1.—Trazar la bisectriz de un ángulo.

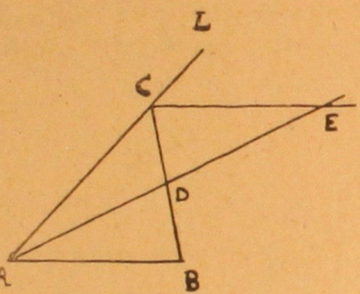
2.—Levantar una perpendicular a una recta.

3.—Bajar una perpendicular a una recta.

4.—Dimidiar un segmento.

TEOREMA III.—Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos interiores, no adyacentes a él.

Hip.—$\sphericalangle LCB = \delta$, es exterior



Tesis: δ es mayor que α: $(\delta > \alpha)$

δ » » » β: $(\delta > \beta)$

Dm.—Se dimidia CB por el punto D, es decir, $CD = BD$.

Se prolonga AD, haciendo $DE = AD$, entonces $\Delta ABD \equiv \Delta CDE$ (Axioma IV).

Luego: $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCE < \sphericalangle DCL$.

o $\beta < \delta$.

Construyendo la figura anterior hacia el otro lado se obtendrá: $\alpha < \delta'$ y como $\delta = \delta'$, se tendrá:

$$\alpha < \delta$$

NOTA III.—Este teorema es una de los más importantes de la geometría; su demostración se ha reproducido desde el tiempo de Euclides hasta nuestros días, la que, con ciertas limitaciones, es válida en las geometrías de Lobatschefsky y Riemann.

TEOREMA IV.—(corolario del anterior). La suma de dos ángulos de un triángulo es menor que 2R (R, significa un ángulo recto).

Hip: β y γ son ángulos interiores.

Tesis.—$\beta + \gamma < 2R$.

Dm.—De la figura anterior se tiene: $\gamma + \delta = 2R$.

y como β es menor que δ, tendremos; $\gamma + \beta < 2R$.

TEOREMA V.—Desde un punto se puede trazar una sola perpendicular a una recta.

Dm.—Consecuencia inmediata de teorema IV.

Dejamos al lector la demostración de los siguientes teoremas que han sido ordenados lógicamente:

1.—En un triángulo hay siempre dos ángulos agudos.

2.—La suma de los ángulos de un triángulo es menor que 3 R.

3.—En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.

4.—Un triángulo que tiene dos ángulos iguales es isósceles.

5.—En un triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado.

6.—La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero.

7.—La diferencia de dos lados de un triángulo es menor que el tercero.

Teoremas de congruencia.

8.—Dos triángulos son congruentes si tienen, respectivamente, iguales un lado y los ángulos adyacentes a él.

9.—Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales un lado y dos ángulos igualmente dispuestos (Severi).

10.—Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales.

11.—Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Observación.—No se ha detallado la demostración de algunos casos interesantes en el grupo de teoremas anteriores por falta de espacio, pero desearíamos recibir de parte de los lectores sugerencias y demostraciones nuevas.